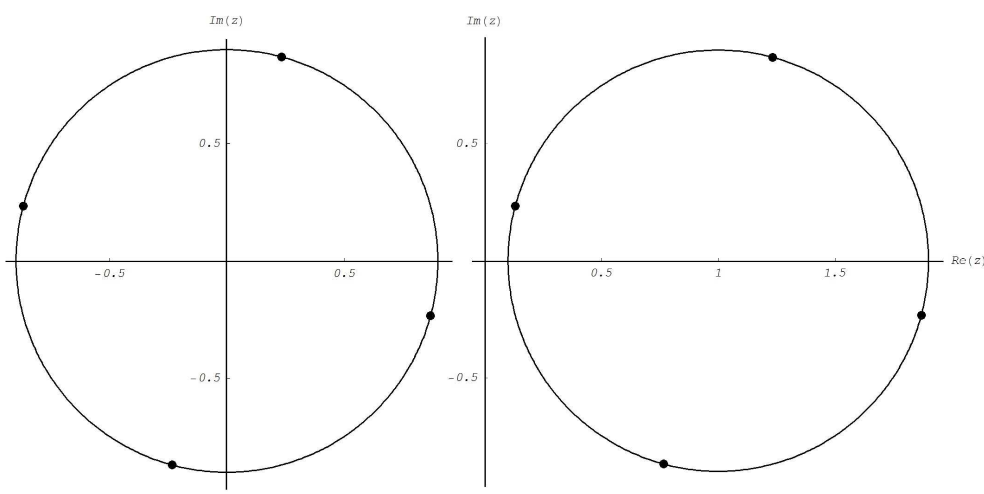
Soluzione dell'esercizio 5.23. Si ha $(\sqrt{3}+i)^2 = 4e^{i\pi/3}$. Quindi, posto $z = \varrho e^{i\vartheta}$, l'equazione scritta diventa

$$4\varrho^4 e^{i\left(4\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)} = 1 + 2\varrho^2.$$

Poiché la quantità a destra è reale e positiva, dovrà essere reale e positiva anche la quantità a sinistra. Ciò accade se e solo se $4\vartheta + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$, ovvero $\vartheta = \frac{\pi}{12}(6k-1)$, per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. Ciò corrisponde, a meno di multipli di 2π, alle fasi $\vartheta = \vartheta_{1,2,3,4} = -\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$. Per tali scelte di ϑ, l'equazione considerata si riduce a $4\varrho^4 - 2\varrho^2 - 1 = 0$. Ciò implica (ricordando che ϱ deve essere positivo) che $\varrho = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$. Si trovano dunque quattro punti, tutti sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$, corrispondenti alle fasi $\vartheta_{1,2,3,4}$.

Circa il secondo punto, la trasformazione $z \mapsto 1 + iz$ corrisponde a una rotazione con centro nell'origine, in senso antiorario e di angolo $\pi/2$ e a una traslazione, di misura uno, nella direzione delle x positive. Dunque B è costituito da quattro punti sulla circonferenza centrata nel punto $z = 1$, con fasi identiche a quelle precedenti.

Gli insiemi A e B sono rappresentati nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 5.24. L'equazione si riscrive, posto $w = z^2$, come $e^w = ie^{4\pi i} = i$. Sia $w = x + iy$. Deve essere allora $e^x e^{iy} = i = e^{i\pi/2}$.