1.4. Equazioni e disequazioni irrazionali

• Proprietà: la casistica delle equazioni e disequazioni irrazionali è illimitata, potendosi presentare un qualsivoglia numero di radici in ogni membro. Noi ci limiteremo ad alcuni casi, cercando di comprendere il metodo per affrontare casi più complicati. Centrale, nella risoluzione, è la determinazione dell'insieme di definizione delle radici, che ci indica in quale sottoinsieme di $\mathbb{R}$ andranno cercate le soluzioni. Più precisamente, bisogna ricordare che l'argomento di una radice pari deve sempre essere non negativo, mentre nessun vincolo si ha per il caso di radici dispari.
Come esempio, consideriamo le due disequazioni

$$a) \quad \sqrt{A(x)} \geq B(x) \qquad\qquad b) \quad \sqrt{A(x)} \leq B(x) \; .$$

In entrambi i casi, occorre imporre $A(x) \geq 0$ e distinguere i due sottocasi $B(x) \geq 0$ e $B(x) < 0$. Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme dove sia $A(x)$ che $B(x)$ sono non negativi e con $\mathcal{B}$ l'insieme dove $A(x)$ è non negativo, mentre $B(x)$ è negativo. Nel caso $a)$, la disequazione proposta si riconduce alla disequazione $A(x) \geq B^2(x)$ in $\mathcal{A}$, mentre è sempre verificata in $\mathcal{B}$. Pertanto, le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} A(x) \geq B^2(x) \\ x \in \mathcal{A} \end{cases} \quad \bigcup \quad \{x \in \mathcal{B}\} \; , \tag{1.2}$$

cioè

$$\begin{cases} A(x) \geq B^2(x) \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \; . \end{cases}$$

Tenendo conto che la condizione $A(x) \geq B^2(x)$ è più restrittiva di $A(x) \geq 0$, si ottiene, infine, che le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} A(x) \geq B^2(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \; . \end{cases}$$

Nel caso $b)$, la disequazione proposta si riconduce alla disequazione $A(x) \leq B^2(x)$, da risolversi nell'insieme $\mathcal{A}$, mentre non è mai verificata nell'insieme $\mathcal{B}$. Pertanto le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} A(x) \leq B^2(x) \\ x \in \mathcal{A} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A(x) \leq B^2(x) \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \; . \end{cases} \tag{1.3}$$

Infine, se al posto della disequazione, consideriamo l'equazione

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \; ,$$

occorre sempre imporre $A(x) \geq 0$ e distinguere ancora i due sottocasi $B(x) \geq 0$ e $B(x) < 0$. Infatti, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono i due insiemi precedentemente definiti, si ha che l'equazione proposta si riconduce all'equazione $A(x) = B^2(x)$ in $\mathcal{A}$, mentre essa non è mai verificata nell'insieme $\mathcal{B}$. Pertanto, le soluzioni sono date da

$$(1.4) \qquad \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ x \in \mathcal{A} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ B(x) \geq 0\ . \end{cases}$$

- Esercizi

1)	$\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x+2}$	$\big(x = \pm\sqrt{2}\big)$
2)	$\sqrt[3]{x^2-9} = x-3$	$(x = 1; 3; 6)$
3)	$\sqrt{x^2+4} = 2x-2$	$(x = 8/3)$
4)	$\sqrt{1-x^2} = x+3$	(impossibile)
5)	$\sqrt{x^2-2x+1} > x-2$	$(\forall x \in \mathbb{R})$
6)	$\sqrt{x^2+1} \geq -1,5$	$(\forall x \in \mathbb{R})$
7)	$\sqrt{x^2-2x+8} \leq x+6$	$(x \geq -2)$
8)	$\sqrt[3]{x^3-27} \geq x-3$	$(x \leq 0; x \geq 3)$
9)	$\sqrt{27x^3-27x^2+9x-1} \geq x-1/3$	$\big(x \geq \frac{10}{27}$ e $x = \frac{1}{3}\big)$
10)	$\sqrt[3]{x+8} < 3x+2$	$(x > 0)$
11)	$\sqrt[4]{x+1} > \sqrt{1-2x}$	$(0 < x \leq 1/2)$
12)	$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+4} \leq 6$	$(-4 \leq x \leq 2)$
13)	$\sqrt{3-x} + \sqrt{5-x} \geq 2$	$(x \leq 11/4)$
14)	$\sqrt{x^2-5x-3} + \sqrt{9-x^2} < -3$	(impossibile)
15)	$\sqrt{\dfrac{9-x}{x+1}} > x-3$	$(-1 < x < 4)$
16)	$x^2-1 < \sqrt{x^2-1}$	$(-\sqrt{2} < x < -1; 1 < x < \sqrt{2})$
17)	$x^2-3 > \sqrt{x^2-4}$	$(x \leq -2; x \geq 2)$
18)	$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} > \sqrt{x+1}$	$(x \geq 2)$
19)	$\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+1}} > x+2$	$(-2 < x < -1)$
20)	$\sqrt[3]{x^3-1} \geq \sqrt{x^2-1}$	$(x \geq 1)$

Svolgiamo, a titolo d'esempio, alcuni dei precedenti esercizi.

Svolgimento 1): *Poiché abbiamo delle radici pari, dobbiamo innanzitutto imporre la condizione di esistenza e poi elevare ambo i membri al quadrato:*

$$\begin{cases} x^2+x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+x = x+2 \end{cases} \qquad \textit{da cui} \qquad \begin{cases} x \leq -1\ ;\ x \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

ovvero $x = \pm\sqrt{2}$.

CAPITOLO 2

NUMERI COMPLESSI

2.1. Richiami

Ricordiamo che un numero complesso z si può rappresentare in forma cartesiana, algebrica, trigonometrica ed esponenziale. Riportiamo qui di seguito le quattro espressioni e le relazioni che intercorrono fra loro:

$$\begin{array}{ll} z=(a,b) & \text{forma cartesiana} \\ z=a+ib & \text{forma algebrica} \\ z=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta) & \text{forma trigonometrica} \\ z=\rho \mathrm{e}^{i\vartheta} & \text{forma esponenziale} \end{array}$$

* * *

$$a=\rho\cos\vartheta \qquad b=\rho\sin\vartheta$$

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\vartheta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\vartheta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dove $a\in\mathbb{R}$ è detta *parte reale* e si indica con $\mathrm{Re}(z)$, $b\in\mathbb{R}$ è detta *parte immaginaria* e si indica con $\mathrm{Im}(z)$, $\rho\in[0,+\infty)$ è detto *modulo*, $\vartheta\in\mathbb{R}$ è detto *argomento* e si indica con $\arg z$ (se $\vartheta\in(-\pi,\pi]$ o, in alcuni testi, $\vartheta\in[0,2\pi)$, esso è detto *argomento principale* e si indica con il simbolo $\mathrm{Arg}\ z$), i è l'unità immaginaria ($i^2=-1$).
L'espressione $\mathrm{e}^{i\vartheta}$ si può leggere come una forma compatta per indicare $\cos\vartheta+i\sin\vartheta$; essa, però, non è solo una scrittura stenografica, ma, come vedremo in seguito, gode effettivamente delle ben note proprietà dell'esponenziale per quanto riguarda il prodotto, il rapporto e le potenze intere. Bisogna, però, tenere ben presente che, contrariamente all'esponenziale reale, l'esponenziale complesso è periodico in ϑ.

Ogni numero complesso, scritto in forma cartesiana o algebrica $z=(a,b)=a+ib$, è in corrispondenza biunivoca con un punto del piano cartesiano (detto anche *piano complesso*) di coordinate cartesiane (a,b), mentre ogni numero complesso, scritto in forma trigonometrica o esponenziale $z=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)=\rho\mathrm{e}^{i\vartheta}$, quando ρ è non nullo e ϑ è l'argomento principale, è in corrispondenza biunivoca con un punto del piano di coordinate polari (ρ,ϑ).

Due numeri complessi z e w coincidono se e solo se, scritti in forma algebrica, hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria, oppure se, scritti in forma trigonometrica o esponenziale, hanno lo stesso modulo e gli argomenti che differiscono per multipli interi di 2π, cioè:

$$z=a+ib=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)=\rho\mathrm{e}^{i\vartheta} \qquad w=c+id=r(\cos\phi+i\sin\phi)=r\mathrm{e}^{i\phi}$$

$$z=w \iff \begin{cases} a=c \qquad b=d \\ \text{oppure} \\ \rho=r \qquad \vartheta=\phi+2k\pi\ . \end{cases}$$

I numeri complessi che hanno parte immaginaria nulla ($b=0$ ovvero $\vartheta=k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$) sono gli usuali numeri reali (positivi per $\vartheta=2k\pi$ e negativi per $\vartheta=(2k+1)\pi$). I numeri della forma $z=ib$, cioè quelli con parte reale nulla ($a=0$ ovvero $\vartheta=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k\in\mathbb{Z}$), sono detti *immaginari*

ESERCIZIO 5.26. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arcsin x)}{x}\,.$$

Svolgimento : *Poiché, per* $x \to 0$, $\arcsin x \sim x$ *e, per* $t \to 0$, $\tan t \sim t$, *ponendo* $t = \arcsin x$, *avremo*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\arcsin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1\,.$$

ESERCIZIO 5.27. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x^4+1}{x^3+5}}\,.$$

Svolgimento : *Osserviamo innanzitutto che il limite proposto si può riscrivere nella forma*
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x^4+1}{x^3+5}} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left[\frac{x^4+1}{x^3+5}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]\,.$$

Ricordando che $\log(1+t) \sim t$, *per* $t \to 0$, *e ponendo* $t = 2/x$, *si ottiene*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{x^3+5}\log\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3}\,\frac{2}{x} = 2\,.$$

Pertanto il limite richiesto vale e^2.

ESERCIZIO 5.28. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{\cos x - \cos(3x)}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$
è continua in $\mathbb{R}$.

Svolgimento : *La funzione proposta è continua e derivabile in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *in quanto somma, composizione e rapporto di funzioni continue. Resta da studiare solo il suo comportamento in* $x = 0$. *Ovviamente per* $x \to 0^+$ *si ottiene* $f(x) \to 0 = f(0)$. *D'altra parte, ricordando che* $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$, *per* $t \to 0$, *e ponendo* $t = x$ *o* $t = 3x$, *si ottiene*
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - \cos(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos(3x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2/2 + 9x^2/2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x^2}{x} = 0\,. \end{aligned}$$

Quindi f *è continua in* $x = 0$.

ESERCIZIO 5.29. Stabilire se la funzione
$$f(x) = -\sqrt{x+1}\big(\log(x+1)\big)^4$$
è prolungabile con continuità in $x = -1$.

9.2. Grafici relativi agli esercizi proposti

In questo paragrafo, per comodità del lettore, le figure seguono la numerazione dell'esercizio a cui il grafico si riferisce.

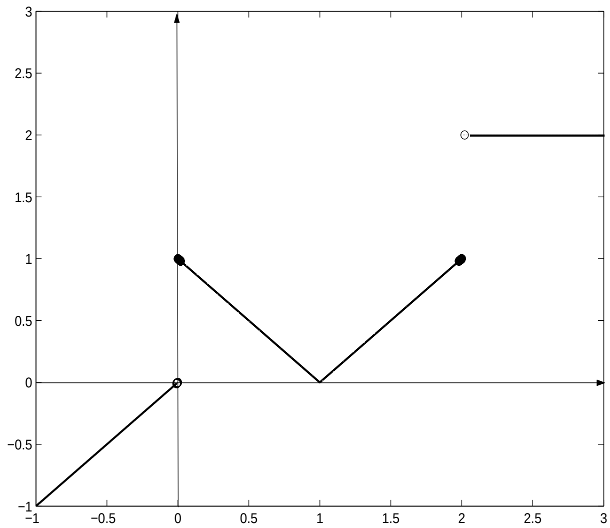

Figura 5.93

Grafico di un esempio di funzione con un salto di ampiezza 1 in $x = 0$ e $x = 2$, e un punto angoloso in $x = 1$

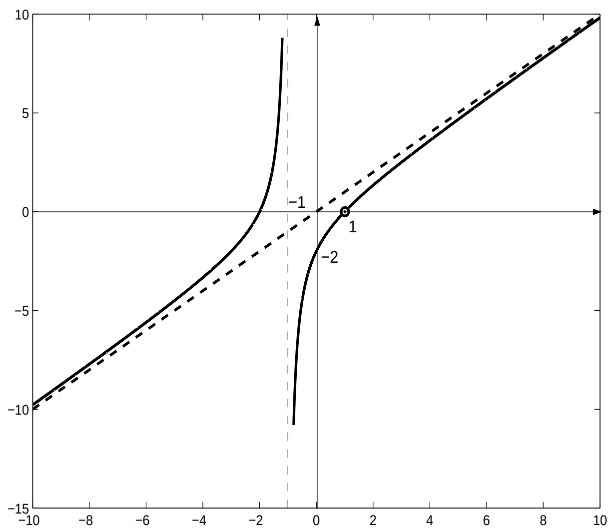

Figura 5.137

Grafico di $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^2-1}$